

雙週一題網路數學問題徵答

113 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 113.12.13 公佈，113.12.27 中午 12 點截止

設 $B(n)$ 為正整數 n 的二進為表達式中 1 的數目。例如 $B(6) = B(110_2) = 2$ ，而 $B(15) = B(1111_2) = 4$ 。判定

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n(n+1)}\right)$$

是或不是一個有理數，這裡 $\exp(x)$ 表示 e^x 。

解答：如果在二進位中 n 共有 d 位，那麼 $2^{d-1} \leq n$ ，因而

$$B(n) \leq d \leq 1 + \log_2 n$$

這立即可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma[B(n)/n(n+1)]$ 收斂到一個實數 S ，因此在以下的兩種解答中對收斂級數施行的操作是可以進行的。每個 n 都可以唯一的表示為 $n_0 + 2n_1 + 2^2n_2 + \cdots$ ，其中 n_i 取自 $\langle 0, 1 \rangle$ （並且除了有限多個 i 以外， $n_i = 0$ ）。由於

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

我們可知，若且唯若 n 具有 $k + 2^i + 2^{i+1}j$ 的形狀時， $n_i = 1$ ，這裡 k 是 $\{0, 1, \dots, 2^i - 1\}$ 中的某個數，而 j 屬於 $(0, 1, 2, \dots)$ 。於是

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=0}^{\infty} n_i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^i-1} \frac{1}{(k + 2^i + 2^{i+1}j)(1 + k + 2^i + 2^{i+1}j)} \end{aligned}$$

應用等式 $1/s(s+1) = 1/s - 1/(s+1)$ 可見，最裡面一層的和數可縮短而

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^i(1+2j)} - \frac{1}{2^i(2+2j)} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j}$$

由 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$ ，所以

$$S = \left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \right) \ln 2 = 2 \ln 2 = \ln 4$$

故 e^S 等於有理數 4。

另一方法，我們注意到 $B(2m) = B(m)$, $B(2m+1) = 1 + B(2m) = 1 + B(m)$ 。
於是

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n(n+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B(2m+1)}{(2m+1)(2m+2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B(2m)}{2m(2m+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1+B(m)}{(2m+1)(2m+2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B(m)}{2m(2m+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} + \sum_{m=1}^{\infty} B(m) \left[\frac{1}{2m(2m+1)} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \right] \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B(m)}{m(m+1)} = \ln 2 + \frac{S}{2} \end{aligned}$$

因此 $S/2 = \ln 2$, $S = \ln 4$ ，因而 $\exp(S)$ 是有理數 4。

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「113 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。