

雙週一題網路數學問題徵答

113 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 114.05.02 公佈，114.05.16 中午 12 點截止

假設對於所有的立方根方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 皆為實數，證明最大根和最小根之間的差異不小於 $\sqrt{a^2 - 3b}$ 和不大於 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 - 3b}$.

解答：令根為有序的且 $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ 又令 $r_2 = r_1 + u$ 和 $r_3 = r_2 + v$ 其中 u 和 v 為非負。然後

$$\begin{aligned}a &= -(r_1 + r_2 + r_3) \\b &= r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}a^2 - 3b &= \frac{1}{2}[(r_1 - r_2)^2 + (r_2 - r_3)^2 + (r_3 - r_1)^2] \\&= \frac{1}{2}[u^2 + v^2 + (u + v)^2] = (u + v)^2 - uv\end{aligned}$$

因為 u 和 v 是非負所以給定

$$a^2 - 3b \leq (u + v)^2$$

因為兩兩不同根差異的最大值為 $u + v$ 。且其至少為 $\sqrt{a^2 - 3b}$ 。

另一方面，

$$\begin{aligned}u + v &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 - 3b} \\&\iff 3(u + v)^2 \leq 4(a^2 - 3b) \\&\iff 4(a^2 - 3b) - 3(u + v)^2 \geq 0\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&4(a^2 - 3b) - 3(u + v)^2 \\&= 4[(u + v)^2 - uv] - 3(u + v)^2 \\&= (u + v)^2 - 4uv \\&= (u - v)^2 \geq 0\end{aligned}$$

所以證明 $4(a^2 - 3b) - 3(u + v)^2 \geq 0$ 成立，

則其差異 $u + v$ 最多為 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2 - 3b}$

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「114 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。