

雙週一題網路數學問題徵答

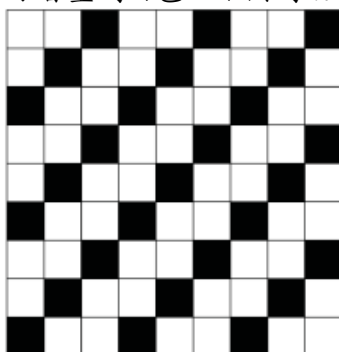
113 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第七題： 114.05.16 公佈，114.05.30 中午 12 點截止

設 n 為一個正整數。考慮一個 $3n \times 3n$ 的正方形棋盤，每個格子皆為單位方格，並以黑白兩色交錯塗色，塗色方式如下：從左上角的格子開始，每隔三條對角線（從右上到左下的對角線）塗為黑色，其餘格子皆塗為白色。下圖為 $n = 3$ 的一個例子：



你可以進行以下操作任意次：選擇棋盤上的任一個 2×2 的正方形區塊，並將其中每個格子的顏色依照下列規則同步變色：白色 $\rightarrow$ 橙色、橙色 $\rightarrow$ 黑色、黑色 $\rightarrow$ 白色。

求有哪些正整數 n ，使得經過有限次上述操作後，可以讓整個棋盤中：所有原本為黑色的格子變成白色，以及所有原本為白色的格子變成黑色。

解答：情形一：當 n 為奇數

我們將證明當 n 是奇數時，我們永遠無法將第一列翻轉為目標顏色。

我們將每一格編上「使其變成目標顏色所需的步數」：

- 白色格子需要經過 2 次操作（白 $\rightarrow$ 橙 $\rightarrow$ 黑），記為 2。
- 黑色格子只需 1 次操作（黑 $\rightarrow$ 白），記為 1。

則棋盤的第一列如下，總共會有 $3n$ 項：

$$2, 2, 1, 2, 2, 1, \dots, 2, 2, 1, 2, 2, 1$$

若要成功完成顏色翻轉，代表這整列中的每個數字最終都要變成 0。

現在觀察操作效果：若對一個 2×2 區塊進行操作，就會有兩個相鄰格子的數值各減去 1（也就是它們各自距離目標狀態更近一步）。

接著定義一個不變量總和：

$$S = 2 - 2 + 1 - 2 + 2 - 1 + \dots$$

也就是按照週期序列中的項進行交錯加減（模仿週期性的變化），你會發現不管 n 是多少，這樣的總和 S 會是 1。

而關鍵在於：每次操作只是讓兩個相鄰數字各自減一，這樣的操作不會改變 S 的值。因此，不管做多少次操作，總和 S 都會維持為 1，這與最終我們希望所有數字都變成 0 (此時 $S = 0$) 矛盾。

所以，當 n 為奇數時，無論怎麼操作都不可能完成顏色翻轉。

情形二：當 n 為偶數

我們只需要證明在 6×6 的子格中可以達成目標狀態。由於如 12×12 、 18×18 等可以分割為若干個 6×6 的重複區塊，因此也可以套用相同方法。

操作步驟：從上到下依序選取每一行，對該行中的每個 2×2 區塊進行變色操作，直到整個格子都完成。

如圖所示，整個變換過程會依以下幾個步驟逐行變換，最終所有黑白互換成功：

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} W & W & B & W & W & B \\ W & B & W & W & B & W \\ B & W & W & B & W & W \\ W & W & B & W & W & B \\ W & B & W & W & B & W \\ B & W & W & B & W & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & W & B & B & W \\ B & O & O & B & O & O \\ B & W & W & B & W & W \\ W & W & B & W & W & B \\ W & B & W & W & B & W \\ B & W & W & B & W & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & W & B & B & W \\ B & W & B & B & W & B \\ B & B & O & B & B & O \\ W & W & B & W & W & B \\ W & B & W & W & B & W \\ B & W & W & B & W & W \end{bmatrix} \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & W & B & B & W \\ B & W & B & B & W & B \\ W & B & B & W & B & B \\ O & W & W & O & W & W \\ W & B & W & W & B & W \\ B & W & W & B & W & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & W & B & B & W \\ B & W & B & B & W & B \\ W & B & B & W & B & B \\ B & B & W & B & B & W \\ O & O & W & O & O & W \\ B & W & W & B & W & W \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B & W & B & B & W \\ B & W & B & B & W & B \\ W & B & B & W & B & B \\ B & B & W & B & B & W \\ B & W & B & B & W & B \\ W & B & B & W & B & B \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

最終結論：

只有當 n 是偶數時，才有可能成功將棋盤顏色完全翻轉。

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「114 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。