

雙週一題網路數學問題徵答
113 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第一題： 113.09.13 公佈，113.09.27 中午 12 點截止

設 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，若 $\tan x = m$ 時，函數 $f(x) = \frac{16}{\sin^6 x} + \frac{81}{\cos^6 x}$ 有最小值 n ，求數對 (m, n) 之值。

解答：由柯西不等式：

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) &\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ \text{令 } a_1 &= \frac{4}{\sin^3 x}, a_2 = \frac{9}{\cos^3 x}, b_1 = \sin x, b_2 = \cos x \\ \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{\sin^3 x} \right)^2 + \left(\frac{9}{\cos^3 x} \right)^2 \right] [\sin^2 x + \cos^2 x] &\geq \left(\frac{4}{\sin^3 x} \sin x + \frac{9}{\cos^3 x} \cos x \right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \left(\frac{4}{\sin^2 x} + \frac{9}{\cos^2 x} \right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{2}{\sin x} \right)^2 + \left(\frac{3}{\cos x} \right)^2 \right]^2 \end{aligned}$$

再由柯西不等式：

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{\sin x} \right)^2 + \left(\frac{3}{\cos x} \right)^2 \right] [\sin^2 x + \cos^2 x] &\geq (2 + 3)^2 \\ &= 25 \\ \Rightarrow \text{RHS} &= \left[\left(\frac{2}{\sin x} \right)^2 + \left(\frac{3}{\cos x} \right)^2 \right]^2 \geq 25^2 \\ &= 625 \end{aligned} \quad (2)$$

由(1) 和(2) 可得:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{16}{\sin^6 x} + \frac{81}{\cos^6 x} \\ &= \left(\frac{4}{\sin^3 x} \right)^2 + \left(\frac{9}{\cos^3 x} \right)^2 (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &\geq 625 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 的最小值 $n = 625$

在柯西不等式中，等號會成立於 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\frac{2}{\sin x}}{\cos x} &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow \tan x &= \frac{\sqrt{6}}{3} = m \end{aligned}$$

$$(m, n) = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 625 \right)$$

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「113 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。