

雙週一題網路數學問題徵答

113 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系
補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 114.03.21 公佈，114.04.04 中午 12 點截止

甲和乙正在玩一個遊戲，由甲先選擇。遊戲開始時有 $3k$ 個空盒子，其中 k 是給定的正整數。每位玩家在自己的回合可以選擇：在一個空盒子內寫入一個非負整數，或擦除某個盒子裡的數字，並將其替換為一個嚴格更小的非負整數。然而，甲只能寫入奇數，而乙只能寫入偶數。當某位玩家無法行動，則對方獲勝；或者場上剛好有 k 個盒子裡的數字是 0：如果其餘的盒子內都填入了數字 1，則乙獲勝，否則，甲獲勝。請問哪位玩家有必勝策略？

解答： **Claim**：若在甲的回合前，最小的數字為奇數，或者局面為 $(x-1, x, x)$ (其中 x 為奇數且 $x \geq 1$)，則乙獲勝。

當 $k = 1$ 時：

(1) 在甲的回合前最小數為奇數時的情況

甲移動後，最小數仍然是奇數 x ，且局面不會變成 $(x, x+1, x+1)$ 。

- 若局面變成 (x, x, x) 或 $(x, x, x+1)$ ，則乙可將其變為 $(x-1, x, x)$ ，使其滿足(2)條件。
- 若局面中存在至少一個數大於等於 $x+2$ ，乙可將該數改為 $x+1$ ，此時最小數仍然是 x 。

(2) 在甲的回合前局面為 $(x-1, x, x)$ ，其中 x 為奇數時的情況

- 若 $x = 1$ ，則乙獲勝。
- 若 $x > 1$ ，甲只能將某個數改為至多 $x-2$ ，此時新最小值變為至多 $x-2$ 的奇數。然後乙將某個 x 變回 $x-1$ (至少有一個仍然是 $x-1$)，使其滿足(1)條件。

由 (1)、(2)，乙總能將局面恢復為滿足條件的狀態，直至乙獲勝。

乙的策略：

- 甲第一步只能放一個奇數 a 在第一個盒子。
- 乙接著在第二個盒子放入 $a+3$ 。
- 若甲在第三個盒子放入奇數，乙則將第二個盒子的 $a+3$ 改為 $a+1$ 。
- 若甲改變第一或第二個盒子的數值，乙則在第三個盒子放入 $a+3$ 。

無論如何，這樣一來三個盒子都填滿，最小數仍為奇數，輪到甲移動，因此乙獲勝。

例子：當 $a = 3, k = 1$ 時，

$(3, ,) \rightarrow (3, 6,) \rightarrow (3, 6, 3) \rightarrow (3, 2, 3) \rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow (1, 2, 2) \rightarrow (1, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 0)$

一般情況 $k \geq 1$

- 乙將所有的盒子分成 k 組，每組 3 個盒子。
- 當甲在某一組中移動時，乙便在同一組內按照 $k = 1$ 的策略應對。

因此，乙在所有 k 值下皆有必勝策略。 □

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「114 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。