

桃園市立中壢高商 113 學年度 校內學科能力競賽 試 卷

科目：(數學科)

■人工閱卷

班級：

學號：

姓名：

壹、 填充題：每題 10 分，共 10 題，總計 100 分，請依照格子編號將答案填入答案卷。

A. $P(x, y)$ 為圓： $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 7 = 0$ 上的動點，座標平面上兩點 $A(0, 4), B(5, 0)$ ，已知當 P 點座標為 (a, b) 時， $\triangle PAB$ 面積有最大值 M ， $M \times |4a + 5b - 20| =$ (1) 。

B. 空間中兩點 $A(1, 0, 2), B(2, 0, 1)$ ，直線 $\begin{cases} x - z = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ 上一動點 P ，請問 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 的最小值為 (2) 。

C. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ，求 $\cos \theta + \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \theta\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5} + \theta\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5} + \theta\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5} + \theta\right) =$ (3) 。

D. 已知三正數 a, b, c 成等比，且滿足 $\log a + \log b + \log c = \log 3$ ，求 $b =$ (4) 。

E. 直線 $2x + 3y = 16$ 分別與 $y = \log_4 x$ 、 $y = 4^x$ 相交於 $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$ ，請問 $\frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} = \underline{\hspace{2cm}} (5)$ 。

F. 設 $\triangle ABC$ 三邊上的高分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ ，D、E、F 為三邊所在直線上的點，且 $\triangle ABC$ 的三高相交於 H，若向量內積 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AF} = 20$ ， $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AE} = 30$ ，則 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \underline{\hspace{2cm}} (6)$ 。

G. 關於多項式函數 $f(x) = (x-2)^3 + a(x-2)^2 + b(x-2) + c$ ， $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(0, -1)$ 且通過點 $(3, -2)$ ，請問 $f(x)$ 除以 $x(x-3)$ 的餘式 = $\underline{\hspace{2cm}} (7)$

H. $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，令 $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} = (I + J)^n$ ，請問 $(a_{200} - b_{200})(c_{200} - d_{200}) = \underline{\hspace{2cm}} (8)$ 。

I. 將一公正六面骰子擲四次，依次記錄點數為 a, b, c, d ， $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，請問擲出的點數使得

$\log_{(a-b)}(c-d)$ 有意義的機率為 (9)。

J. 利用 5 種不同的顏料，將右圖中 6 格方塊著色，每一格均僅能使用單色，且相鄰方塊顏色不能相同，

共有 (10) 種著色方法。(有共用邊才算相鄰)

貳、 證明題，每題 20 分，共 2 題，總分 40 分。

一. 根據算幾不等式，對於任意 n 個非負數 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，均存在下列關係：

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$$

，試證明：對於任意正整數 n ，均滿足 $1 + \frac{2}{3n-2} \leq 3^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{2}{n}$ 。

二. 利用數學歸納法證明：對於所有正整數 n ，均滿足 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ 。