桃園市立中壢高商 113 學年度 校內學科能力競賽 參考答案

科目：(數學科)　■人工閱卷

班級：　學號：　姓名：　總　分：

作答注意事項：請用**藍色**或**黑色**筆書寫答案，未依指定顏色用筆作答，視為無作答，以 0 分計算。

壹、　填充題，每題 10 分，共 10 題，總計 100 分，請依照**格子編號**將答案填入

題號	A.	B.	C.	D.
格號	1.　(10 分)	2.　(10 分)	3.　(10 分)	4.　(10 分)
答案	$\frac{6241}{8}$	$5\sqrt{2}$	0	$\sqrt[3]{3}$
題號	E.	F.	G.	H.
格號	5.　(10 分)	6.　(10 分)	7.　(10 分)	8.　(10 分)
答案	$\frac{-3}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{-x}{3}-1$	-1
題號	I.	J.		
格號	9.　(10 分)	10. (10 分)		
答案	$\frac{25}{216}$	3380 or 360 均給分		

貳、　證明題，每題 20 分，共 2 題，總計 40 分。(作答不需按照順序，標記清楚題號即可。)

題號	證明過程
(一)	(i)令 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=1, a_n=3$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n-1+3=n+2$ 根據算幾不等式：$\left(a_1\times a_2\times\cdots\times a_n\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\Rightarrow(1\times1\times\cdots\times3)^{\frac{1}{n}}\le\frac{n+2}{n}\Rightarrow 3^{\frac{1}{n}}\le1+\frac{2}{n}$ (ii)令 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=1, a_n=\frac{1}{3}$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n-1+\frac{1}{3}=n-\frac{2}{3}$ 根據算幾不等式：$\left(a_1\times a_2\times\cdots\times a_n\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\Rightarrow\left(1\times1\times\cdots\times\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{n-\frac{2}{3}}{n}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{3n-2}{3n}$ $\Rightarrow 3^{\frac{1}{n}}\ge\frac{3n}{3n-2}=1+\frac{2}{3n-2}$ 綜合(i)& (ii) 可知 $1+\frac{2}{3n-2}\le3^{\frac{1}{n}}\le1+\frac{2}{n}$。

空間不夠請翻頁繼續，測驗不另外提供答案紙，請注意作答空間。

題號	證明過程
(二)	當 $n=1$ 時，左式：$\frac{1}{1^2}=1$ ，右式：$2-\frac{1}{1}=1$，左式≤右式，原式成立。 設 $n=k$ 時，$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\le 2-\frac{1}{k}$ ，$k\in N$ ，原式成立。 則 $n=k+1$ 時， $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}=2+\frac{-(k+1)+1}{k(k+1)}=2-\frac{1}{(k+1)}$ 。 原式成立。 綜合以上，根據數學歸納法得知：對於所有正整數 n，均滿足 $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}$ 。

試卷結束