雙週一題網路數學問題徵答
113 學年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第八題： 114.05.30 公佈，114.06.13 中午 12 點截止

設 T 爲所有正整數三元組 (a,b,c) 所組成的集合，滿足存在一個三角形，其邊長爲 $a,\ b,\ c$ 的三角形。
請計算下列總和，並將結果化爲最簡分數形式的有理數：

$$\sum_{(a,b,c)\in T} \frac{2^a}{3^b 5^c}$$

答案：$\frac{17}{21}$

解答： 對於固定 $b,\ c$，若且唯若當 $|b-c|<a<b+c$ 時，有一個邊長爲 $a,\ b,\ c$ 的三角形。因此可得出總和爲

$$S=\sum_{b,\ c} \frac{1}{3^b 5^c}\left(\sum_{a=|b-c|+1}^{b+c-1} 2^a\right)=\sum_{b,\ c} \frac{2^{b+c}-2^{|b-c|+1}}{3^b 5^c}$$

將其寫成 $S=S_1+S_2$，其中對於 $b\le c$ 時，S_1 爲正整數 $b,\ c$ 的和，以及 S_2 的和在 $b>c$。則

$$\begin{aligned}
S_1&=\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{c=b}^{\infty} \frac{2^{b+c}-2^{c-b+1}}{3^b 5^c}\\
&=\sum_{b=1}^{\infty}\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^b-\frac{2}{6^b}\right)\sum_{c=b}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^c\right)\\
&=\sum_{b=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^b-\frac{2}{6^b}\right)\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^b\\
&=\sum_{b=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\left(\frac{4}{15}\right)^b-\frac{10}{3}\left(\frac{1}{15}\right)^b\right)\\
&=\frac{85}{231}
\end{aligned}$$

同樣的，

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{c=1}^{\infty}\sum_{b=c+1}^{\infty}\frac{2^{b+c}-2^{b-c+1}}{3^b5^c}\\
&= \sum_{c=1}^{\infty}\left(\left(\left(\frac{2}{5}\right)^c-\frac{2}{10^c}\right)\sum_{b=c+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^b\right)\\
&= \sum_{c=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^c-\frac{2}{10^c}\right)3\left(\frac{2}{3}\right)^{c+1}\\
&= \sum_{c=1}^{\infty}\left(2\left(\frac{4}{15}\right)^c-4\left(\frac{1}{15}\right)^c\right)\\
&= \frac{34}{77}
\end{aligned}
$$

結論為 $S = S_1 + S_2 = \frac{17}{21}$。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「114 年春季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號和 E-mail**。