

雙週一題網路數學問題徵答 113 學年度第 1 學期

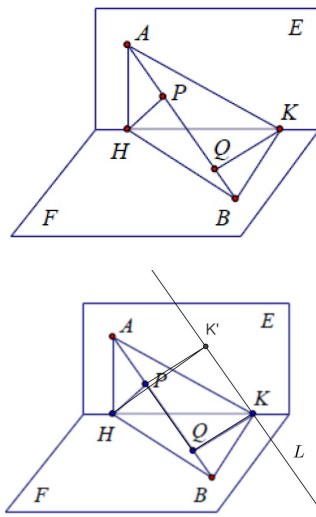
主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第二題：

113.09.27 公佈，113.10.11 中午 12 點截止

已知平面 E 與平面 F 互相垂直且相交於直線 $\overline{HK}$ ，點 A, B 分別在平面 E, F 上，使得 $\overline{AH} \perp \overline{HK}$, $\overline{BK} \perp \overline{HK}$ ，且 P, Q 為 H, K 在 $\overline{AB}$ 上的垂足，如圖所示。若 $\cos \angle BAK = \frac{2}{3}$, $\cos \angle ABH = \frac{7}{9}$ ，令半平面 ABK 與半平面 ABH 所成二面角之度量為 θ ，則 $\cos \theta$ 之值為何？



解答：

不失一般性，設 $\overline{AB} = 9$

$$\cos \angle BAK = \frac{2}{3} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} = \frac{6}{9} \Rightarrow \overline{AK} = 6$$

$$\cos \angle ABH = \frac{7}{9} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BH} = 7$$

利用畢氏定理可得，其中 $\overline{HK} = 2$, $\overline{PH} = \frac{28\sqrt{2}}{9}$, $\overline{KQ} = 2\sqrt{5}$, $\overline{PQ} = 9 - \overline{AP} - \overline{QB} = 9 - \frac{32}{9} - 5 = \frac{4}{9}$ 。

在 ABK 平面上過 K 點作一直線 L 平行 $\overline{AB}$ ，令 P 點與 L 的垂足為 K' ，則 $\overline{KK'} = \overline{PQ}$, $\overline{PK'} = \overline{QK}$, $\overline{KK'} \perp \overline{PK'}$ 且 $\overline{KK'} \perp \overline{PH} \Rightarrow \overline{KK'} \perp \overline{HK'}$ ，所求之兩面角即為 $\theta = \angle HPK'$ 。

再利用 $\overline{KK'} \perp \overline{HK'}$ ，可知 $\triangle HKK'$ 為直角三角形， $\overline{HK'}^2 = \overline{HK}^2 - \overline{KK'}^2$ ；

由餘弦定理可知， $\overline{HK'}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{PK'}^2 - 2 \times \overline{PH} \times \overline{PK'} \cos \theta$ ，

兩式相等可知 $2^2 - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{28\sqrt{2}}{9}\right)^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2 \times \frac{28\sqrt{2}}{9} \times 2\sqrt{5} \times \cos \theta$ ，可得 $\cos \theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ 。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「113 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。