

雙週一題網路數學問題徵答 113 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第八題：113.12.27 公佈，113.1.10 中午 12 點截止

令 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ 是一個正整數的遞增序列。令級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

收斂。對於任意數 x ，令 $k(x)$ 是其值不超過 x 的 a_n 的數目。證明 $\lim_{x \rightarrow \infty} k(x)/x = 0$ 。

解答：以下的證明表示規定 a_n 是整數是沒有必要的。

使用矛盾證法，假定對某些 $\epsilon > 0$ 存在 $x_j \rightarrow \infty$ 且 $k(x_j)/x_j \geq \epsilon$ 。

注意：如果 $1 \leq n \leq k(x_j)$ ，則(因為 a_n 遞增) $a_n \leq \cdots \leq a_{k(x_j)} \leq \cdots \leq x_j$ 和 $1/a_n \geq \cdots \geq 1/a_{k(x_j)} \geq \cdots \geq 1/x_j$ 。現在對於任何正整數 N ，

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{a_n} \geq \sup_j \sum_{n=N}^{k(x_j)} \frac{1}{x_j} \geq \sup_j \frac{k(x_j) - N}{x_j} \geq \sup_j \left(\epsilon - \frac{N}{x_j} \right) = \epsilon > 0$$

(sup : 最小上界，定義： $\forall s \in S, s \leq \sup(S)$)

但這個與 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收斂性矛盾，此矛盾推出

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \quad \square$$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「113 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。