雙週一題網路數學問題徵答
113 學年度第 2 學期

主辦單位: 中山大學應用數學系
補助單位: 教育部暨中山大學研究發展處

第四題： 114.04.04 公佈，114.04.18 中午 12 點截止

是否存在具有實係數的多項式 $P(x)$ 和 $Q(x)$，使 $P(P(x))\cdot Q(Q(x))$ 恰好有 2025 個不同的實根，$P(Q(x))\cdot Q(P(x))$ 恰好有 2026 個不同的實根?

解答： 我們將證明對於所有正整數 n，存在具有實係數的多項式 P,Q，使得 $P(P(x))\cdot Q(Q(x))$ 恰好有 n 個不同的實根，而 $P(Q(x))\cdot Q(P(x))$ 恰好有 $n+1$ 個不同的實根。我們將構造 P 和 Q。取 $0<p_1<p_2<\ldots<p_{n-1}$ 爲 $n-1$ 個不同的正實數，並取 $0<q_1<q_2<\ldots<q_{n+1}$ 爲另外 $n+1$ 個不同的正實數。
設

$$P(x)=x^2(x+p_1)^2(x+p_2)^2...(x+p_{n-1})^2$$
$$Q(x)=(x+q_1)^2(x+q_2)^2...(x+q_{n+1})^2$$

因此，

$$P(P(x))=P(x)^2(P(x)+p_1)^2(P(x)+p_2)^2...(P(x)+p_{n-1})^2=P(x)^2\cdot R(x)$$
，其中 $R(x)$ 爲具有實係數且無實根的多項式，
$$Q(Q(x))=(Q(x)+q_1)^2(Q(x)+q_2)^2...(Q(x)+q_{n+1})^2=T(x)$$
，其中 $T(x)$ 也是具有實係數且無實根的多項式。

所以 $P(P(x))\cdot Q(Q(x))$ 恰好有 n 個實根。

同樣地，

$$P(Q(x))=Q(x)^2(Q(x)+p_1)^2(Q(x)+p_2)^2...(Q(x)+p_{n-1})^2=Q(x)^2\cdot U(x)$$
，其中 $U(x)$ 爲具有實係數且無實根的多項式，
$$Q(P(x))=(P(x)+q_1)^2(P(x)+q_2)^2...(P(x)+q_{n+1})^2=V(x)$$
，其中 $V(x)$ 也是具有實係數且無實根的多項式。

因此，$P(Q(x))\cdot Q(P(x))$ 恰好有 $n+1$ 個實根，證明完成。 □

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨爲「114 年春季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。