

雙週一題網路數學問題徵答 113 學年度第 2 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第五題： 114.04.18 公佈，114.05.02 中午 12 點截止

請找出所有符合條件的正整數組合 (a, p) ，其中 p 為質數，使得 $p^a + a^4$ 是一個完全平方數。

解答： (i) 若 $p \geq 5$ ：

$$\text{設 } p^a + a^4 = k^2 \iff p^a = (k - a^2)(k + a^2)$$

設 $k + a^2 = p^{a-x}$ ，則 $k - a^2 = p^x$ ，相減得： $2a^2 = p^{a-x} - p^x = p^x(p^{a-2x} - 1)$ ，

設 $RHS = p^x(p^{a-2x} - 1)$ 和 $LHS = 2a^2$ ，

接著使用 p-adic valuation ($v_p(n) = \max \{k \in \mathbb{N} : p^k \mid n\}$, if $n \neq 0$)，

因為 $v_p(p^{a-2x} - 1) = 0$ ，所以 $v_p(RHS) = x$ ，又 $x = v_p(RHS) = v_p(LHS) = v_p(2a^2) = 2v_p(a)$ (x 為偶數)，所以設 $a = p^{\frac{x}{2}}b$ ，其中 $(p, b) = 1$ ，

代入得： $2b^2 + 1 = p^{a-2x} = p^{p^{\frac{x}{2}}b-2x}$

$$\implies 2b^2 + 1 = p^{p^{\frac{x}{2}}b-2x} \geq p^{5^{\frac{x}{2}}b-2x} \geq p^b \geq 5^b$$

，然而比較 5^b 和 $2b^2 + 1$ 可發現 $5^b > 2b^2 + 1$ ，矛盾成立。

(ii) 若 $p = 3$ ：

$$3^a = (k - a^2)(k + a^2)$$

設 $k - a^2 = 3^x$ ，則 $k + a^2 = 3^{a-x}$

相減得： $2a^2 = 3^x(3^{a-2x} - 1)$ ，同理 (i) $v_3(RHS) = x = v_3(2a^2) = 2v_3(a)$ ，

設 $a = 3^{\frac{x}{2}}b$ ，代入得： $2b^2 + 1 = 3^{3^{\frac{x}{2}}b-2x}$ ，

– 若 $b = 1$ ，則 $3^{\frac{x}{2}} - 2x = 1 \implies x = 0, 4 \implies \boxed{(a, p) = (9, 3), (1, 3)}$ 。

– 若 $b = 2$ ，則 $2 \times 3^{\frac{x}{2}} - 2x = 2 \iff 3^{\frac{x}{2}} - x = 1 \implies x = 0, 2 \implies \boxed{(a, p) = (6, 3), (2, 3)}$ 。

– 若 $b \geq 3$ ，則有： $3^b > 2b^2 + 1 = 3^{3^{\frac{x}{2}}b-2x} \implies b > 3^{\frac{x}{2}}b - 2x$
 $\implies 2x > b(3^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 3(3^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 2x$ 矛盾成立。

(iii) 若 $p = 2$ ：

設 $k - a^2 = 2^x$ ，則 $k + a^2 = 2^{a-x}$ ，

相減得： $2a^2 = 2^x(2^{a-2x} - 1) \iff a^2 = 2^{x-1}(2^{a-2x} - 1)$ ，

注意： $k - a^2 \neq 1$ ，若 $k - a^2 = 1 \implies x = 0 \implies 2a^2 = 2^a - 1$ ，但其中 $2a^2$ 為偶數， $2^a - 1$ 為奇數，矛盾，所以 $k - a^2 \neq 1$ 。

接著回到相減式子，同理 (i)， $v_2(RHS) = x - 1 = v_2(a^2) = 2v_2(a)$ ，

設 $a = 2^{\frac{x-1}{2}}b$ 和 $x = 2m + 1$ ，則 $a = 2^mb$ ，代入得： $b^2 + 1 = 2^{2^mb-4m-2}$

- 若 $m = 1$: $b^2 + 1 = 2^{2b-6}$, $b^2 + 1 = 2^{2b-6} \underbrace{>}_{\text{for } b \geq 6} b^2 + 1$, 顯然矛盾, 無解。
- 若 $m = 2$: $b^2 + 1 = 2^{4b-10}$, $b^2 + 1 = 2^{4b-10} \underbrace{>}_{\text{for } b \geq 4} b^2 + 1$, 顯然矛盾, 無解。
- 若 $m \geq 3$, 因為 $2^m > 4m + 2$, 則

$$2^{b+1} \geq b^2 + 1 = 2^{2^m b - 4m - 2} > 2^{(4m+2)(b-1)} \geq 2^{12(b-1)} \implies b+1 \geq 12(b-1) \implies b = 1$$

矛盾。

總結: 滿足題目條件之組合有 $(a, p) = (1, 3), (2, 3), (6, 3), (9, 3)$

□

答案請寄至 - 高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱, 或傳真 07-5253809, 或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「114 年春季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者, 請在信件中打字註明您的資料, 包含: 姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。