

# 雙週一題網路數學問題徵答 113 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第六題： 113.11.29 公佈，113.12.13 中午 12 點截止

令  $n$  為一大於 1 的整數。證明存在一整係數多項式  $P(x, y, z)$  使得  $t = P(t^n, t^{n+1}, t + t^{n+2})$ 。

解答：令  $x = t^n$ ,  $y = t^{n+1}$ ,  $z = t + t^{n+2}$ 。我們造一整係數多項式  $P(x, y, z)$  使得  $P(x, y, z) = t$ 。我們有

$$\begin{aligned} z &= t + t^{n+2} \\ zy &= t^{n+2} + t^{2n+3} \\ zy^2 &= t^{2n+3} + t^{3n+4} \\ &\vdots \\ zy^{n-2} &= t^{n^2-n-1} + t^{n^2} \end{aligned}$$

將上述等式取第一等式依順序先減後加可得：

$$z[1 - y + y^2 - \cdots + (-1)^{n-2}y^{n-2}] = t + (-1)^{n-2}t^{n^2} = t + (-1)^n x^n$$

因此如果我們定義

$$P(x, y, z) = z \left[ \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i y^i \right] + (-1)^{n-1} x^n$$

那麼  $P(t^n, t^{n+1}, t + t^{n+2}) = t$ 。

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 [nsysu.problem.2024@gmail.com](mailto:nsysu.problem.2024@gmail.com) (主旨為「113 年秋季第  $X$  題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。