雙週一題網路數學問題徵答
113 學年度第 1 學期

主辦單位:　中山大學應用數學系
補助單位:　教育部暨中山大學研究發展處

第五題：　　113.11.15 公佈，113.11.29 中午 12 點截止

我們有 $n \geq 2$ 盞燈 $L_1, \ldots, L_n$ 排成一排，每盞燈有開或關兩種狀態。每秒鐘我們會同時修改每盞燈的狀態，依照此規則：如果燈 L_i 和其相鄰燈(對於 L_1 或 L_n 只有一個鄰燈，對其他 i 則有兩個鄰燈)處於相同狀態，則 L_i 則會被關閉；否則會被打開。最初所有燈都處於關閉狀態除了最左邊的那盞燈 L_i 是開的。
(a) 證明存在無限多個整數 n ，使得所有燈最終都會關閉。
(b) 證明存在無限多個整數 n ，使得燈永遠不會全部關閉。

解答： 設 $S_n(t)$ 表示有 n 盞燈，在第 t 秒時燈串的狀態，$S_n(t) = [L_1, \ldots, L_n], t \in \mathbb{Z}_0{}^+$
設 $L_i = 0$ 表示燈為關閉的狀態，$L_i = 1$ 表示燈為開啓的狀態。
舉例：當 $n = 2$ 時，$S_2(0) = [1, 0], S_2(1) = [1, 1]$
由每盞燈轉換規則可推得，
(1) 當有一串(大於等於2個) 1 靠在左或右邊界時，則下一秒會向右或左延伸一對 1
ex : $[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0] \to [0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$
(2) 當有一串(大於2個) 1 在非邊界時，則下一秒會向左和右各延伸一對 1
ex : $[0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0] \to [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$
(3) 當有一對 1 在非邊界時，則下一秒會向左右各延伸一個 1 ，形成四個 1
ex : $[0, 1, 1, 0, 0, 0] \to [1, 1, 1, 1, 0, 0]$
(4) 當數列全為 1 時，則下一秒會變成全為 0 且此狀態永不改變

設 $m \geq 2$，且當 m 夠大時，由上述 (1)、(2)和(3)可推每秒狀態如下：

$$
\begin{aligned}
S_m(1) &= [1, 1, 0, \ldots, 0] \\
S_m(2) &= [0, 1, 1, 0, \ldots, 0] \\
S_m(3) &= [1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0] \\
S_m(4) &= [0, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0] \\
S_m(5) &= [0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0] \\
S_m(6) &= [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0] \\
S_m(7) &= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

由上面可看出在第一秒時會出現一對 1，由(1)使得他們會往右移動，接著由(3)將 1 的數量增加，接著又由(1)將一對 1 往右移動，接著又由(3)增加 1，接著由(2)產生

第二對 1，重複上述的規律。

(a)

由上(4)，若要使燈爲全關狀態，則要先找到燈全開的狀態，又由上述規律中可發現
在做完(3)步驟後，若剛好使其數列全爲 1 (設定特定數量的燈)，
則能達成燈全開的要求。

其中當 $n = 2^k$ 時，會使得 $S_{2^k}(2^k - 1) = [1, 1, \ldots, 1], \forall k \in \mathbb{Z}^+$

$\because$ 在 $n = 2^k$ 時， $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ 都會在第 2^k 秒時使燈串呈現全部關閉的狀態

$\therefore$ 存在無限多個 k ，使得 $n = 2^k$ 個燈在第 2^k 秒時使燈串呈現全部關閉的狀態

$\Rightarrow$ 存在無限多個 n ，使得所有燈最終都會關閉狀態 $\square$

(b)

在做完(1)步驟後，若剛好使一對 1 在右邊邊界上(設定特定數量的燈)，則此數列會與第一秒時
呈現鏡像關係，由此鏡像關系可得知再經過相同時間後，會與第一秒的狀態相同，呈現遞迴關係，
又由(4)反證:

因爲出現狀態全爲關閉時，此狀態會永不改變，所以出現上述遞迴關係代表此串燈永不全關閉。

其中當 $n = 2^k + 1$ 時，會使得最後兩個燈狀態爲1： $S_{2^k+1}(2^k) = [0, \ldots, 0, 1, 1], \forall k \in \mathbb{Z}^+$

$\therefore$ 存在無限多個 $k \in \mathbb{Z}^+$ ，使得 $n = 2^k + 1$ 個燈會呈現遞迴關系

$\Rightarrow$ 存在無限多個整數 n，使得燈永遠不會全部關閉 $\square$

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨爲「113 年秋季第 X 題解答」) 。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：**姓名、校名、校址縣市、系所、年級 、班級、學號**和 **E-mail**。