

雙週一題網路數學問題徵答 113 學年度第 1 學期

主辦單位：中山大學應用數學系

補助單位：教育部暨中山大學研究發展處

第三題： 113.10.16 公佈，113.11.01 中午 12 點截止

實係數多項式 $f(x)$ ，若 $\deg f(x) = 2010$ ，且 $f(k) = \frac{2k+1}{k}$ ， $\forall k = 1, 2, 3, \dots, 2011$ ，
求 $\sum_{k=0}^{2011} (C_k^{2012} \cdot (-1)^k \cdot f(k+1))$ 值。 答案：-3

解答：令 $g(x) = xf(x)$ ， $\deg g(x) = 2011$ ，且 $g(k) = 2k+1$ ， $\forall k = 1, 2, \dots, 2011$ ，
則 $g(x) = a(x-1)(x-2)\cdots(x-2011) + 2x+1$ 。
由

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \cdot f(0) = 0 \\ \Rightarrow -2011! \times a + 1 &= 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2011!} \\ \Rightarrow g(2012) &= 4026 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2011} (C_k^{2012} \cdot (-1)^k \cdot f(k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{2010} \left(C_k^{2012} (-1)^k \frac{2k+3}{k+1} \right) + C_{2011}^{2012} (-1)^{2011} \frac{g(2012)}{2012} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{2010} C_k^{2012} (-1)^k + \sum_{k=0}^{2010} (-1)^k \frac{2012!}{k!(2012-k)!} \times \frac{1}{k+1} - g(2012) \\ &= 2 (C_{2011}^{2012} - C_{2012}^{2012}) + \frac{1}{2013} \sum_{k=1}^{2011} (-1)^{k+1} C_k^{2013} - 4026 \\ &= 4022 + \frac{1}{2013} \times 2013 - 4026 \\ &= -3 \end{aligned}$$

□

答案請寄至－高雄市中山大學應數系圖書館的『雙週一題』信箱，或傳真 07-5253809，或利用電子郵件信箱 nsysu.problem.2024@gmail.com (主旨為「113 年秋季第 X 題解答」)。若以電子郵件信箱寄送答案者，請在信件中打字註明您的資料，包含：姓名、校名、校址縣市、系所、年級、班級、學號和 E-mail。